$N(x,y) \in F \Leftrightarrow \exists \varphi \in]0,\pi[$ tel que $\begin{cases} x = 0 \\ y = tg\frac{\varphi}{2} \end{cases}$

• Soit $f :]0,\pi[\to IR; \varphi \mapsto tg\frac{\varphi}{2}$.

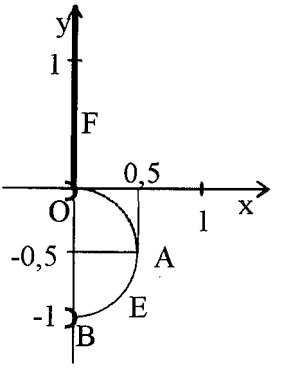
f est dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall \varphi \in]0,\pi[; f'(\varphi)=\frac{1}{2}[1+tg^2\frac{\varphi}{2}]>0$

D'où f est continue et strictement croissante sur $]0,\pi[$

$\Rightarrow f(]0,\pi[)=\left]\lim_{\varphi\to 0^+} f(\varphi), \lim_{\varphi\to\pi^-} f(\varphi)\right[$

$=]0;+\infty[$.

Enfin quand φ varie sur $]0,\pi[$ on a $y \in]0;+\infty[$.



Conclusion: F est la demi-droite des ordonnées $[Oy)\backslash\{O\}$ d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y \in]0;+\infty[\end{cases}$

PROBLEME

A-1)a- • $f(1)=1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} (1)=1$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x+Logx}{x}\right]=1$

D'où f est continue en 1.

⊖ f est continue sur $]-\infty;1[$ (car elle est constante sur cet intervalle)

⊗ f est continue sur $]1;+\infty[$ (quotient de deux fonctions continues)

Bilan : f est continue sur IR.

b- ⊙ $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1-1}{x-1}\right]=0$

⊡ $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x+Logx}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x}.\frac{Logx}{x-1}\right]=1$

Comme $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ alors f n'est pas dérivable en 1.

2)a- • f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $\forall x \in]-\infty;1[; f'(x)=0$.

• f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[$ on a

$$f'(x)=\frac{(1+\frac{1}{x})x-(x+Logx)}{x^2}=\frac{1-Logx}{x^2}$$

D'où $\forall x \in]1;+\infty[, sig[f'(x)] = sig(1-Logx)$.

Ce qui nous permet de dresser le tableau de variation de f